WunderBooks
WWU MÜNSTER

EINZELPHOTON-INTERFERENZ BEIM MACH-ZEHNDER INTERFEROMETER

Seit gut 20 Jahren können Interferenzexperimente auch mit einzelnen Photonen durchgeführt werden. In diesem Workbook untersuchen wir das Verhalten **einzelner** Photonen beim Mach-Zehnder Interferometer. Zu dem Experiment steht ein Simulationsprogramm zur Verfügung.

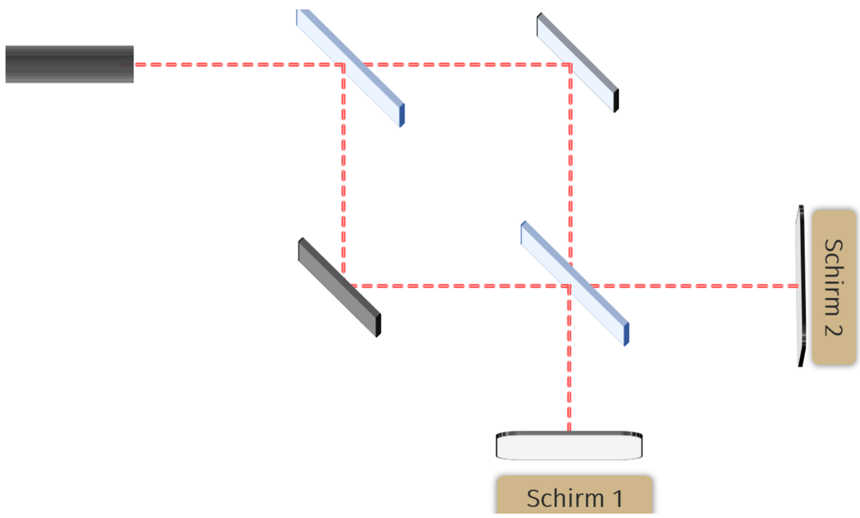
Simulationsprogramm
Am Laptop kann ein Simulationsprogramm für Einzelphoton-Interferenz am Mach-Zehnder Interferometer installiert werden:
https://www.milq.info/materialien/simulationsprogramme/

Expertenaufgaben
Achtung! Bei den Einzelphoton-Aufgaben musst Du mit komplexen Zahlen rechnen!

① Betrachte die untenstehende Skizze vom Strahlengang.

- Zeichne den Weg der beiden Teilstrahlen ein, die auf Schirm 1 interferieren.
- Zeichne (mit einer anderen Farbe) den Weg der beiden Teilstrahlen ein, die auf Schirm 2 interferieren.
- Notiere an beiden Schirmen jeweils die Anzahl von Reflektionen (R) und Transmissionen (T), die jeder der Teilstrahlen an den Strahlteilern durchläuft.

Strahlteiler
Wenn ein Photon auf einen Strahlteiler trifft, wird die Amplitude in zwei gleich große Anteile aufgeteilt. Es ist nicht möglich zu sagen, welchen „Weg“ das Photon nimmt.

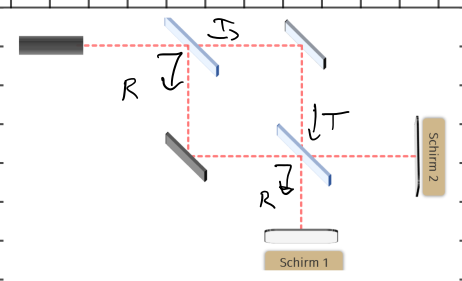


gefördert durch:
WILHELM UND ELSE HERAEUS-STIFTUNG

INTERFERENZVERHALTEN BEIM MACH-ZEHNDER INTERFEROMETER

Nun vergleichen wir die Muster auf **Schirm 1** und **Schirm 2**.

② Vergleiche die Muster beider Schirme. Stelle Vermutungen auf, weshalb sich die Muster unterscheiden.



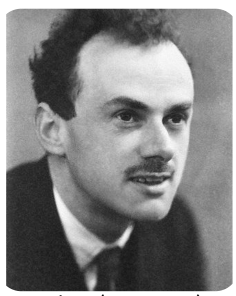
Schirm 1:
Überlagerung
RR und TT
Schirm 2:
Überlagerung RT und TR
Dieser Unterschied in Phasensprüngen
führt zu komplementären Mustern.

Tip
Jede Reflektion am Strahlteiler führt zu einem Phasensprung der Amplitude von 180°.

Beim Übergang zu einzelnen Photonen wird die Intensitätsverteilung (die sich bei sehr vielen Photonen ergibt) zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für das einzelne Photon. Im verlinken Video erklären wir den Zusammenhang am Beispiel vom Doppelspalt.

DIRACS BRA-KET NOTATION

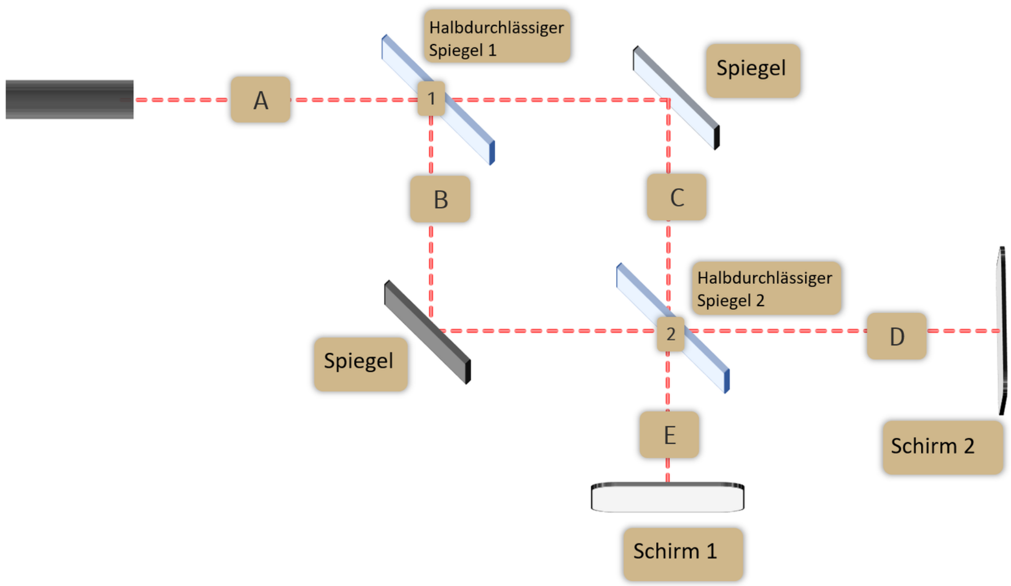
Der geniale englische Physiker Paul Dirac hat 1939 eine Notation eingeführt, mit der Amplituden einzelner Quanten (z.B. Photonen) durch **Zustände** beschrieben werden. Es sei $|A>$ der Zustand des Photons, dann ist $\psi(x) =< x|A >$ die Wellenfunktion am Ort x, und $P(x) = |\psi(x)|^2 = |<x|A>|^2$ die Wahrscheinlichkeit, das Photon am Ort x zu detektieren. Der Vorteil dieser Notation ist die strikte Trennung vom Zustand und der Wahl der Messbasis: Ohne Messbasis hat der Zustand des Photons z.B. keine räumliche Interpretation, $|A>$ ist rein abstrakt zu verstehen. Als **Amplitude** wird der Vorfaktor vor dem Zustand bezeichnet, allgemein $\sqrt{p}e^{i\phi/2}|A>$, wenn p die Wahrscheinlichkeit ist, den Zustand $|A>$ zu detektieren. Durch den komplexen Phasenfaktor $e^{i\phi/2}$ wird die Amplitude interferenzfähig.


Paul Dirac (1902-1984)

Imaginäre Einheit i
Die Wurzel aus minus ein wird auch als imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ geschrieben. Es gilt $i^2 = -1$.

gefördert durch:
WILHELM UND ELSE HERAEUS-STIFTUNG

ZUSTÄNDE, AMPLITUDEN UND WAHRSCHEINLICHKEITEN BEIM MACH-ZEHNDER INTERFEROMETER



Es sei $|A>$ der Zustand des Photons auf dem mit A bezeichneten Teilstück in der Abbildung. Beim ersten halbdurchlässigen Spiegel teilt sich die Amplitude in zwei gleich große Anteile mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Das Quadrat der Amplituden ist $1/2$, die Amplituden selber sind also proportional zu Wurzel, also $1/\sqrt{2}$. Nach dem ersten Strahlteiler gilt also $|A>\to 1/\sqrt{2}(\sqrt{-1}|B> + |C>)$. Der Phasensprung (Umkehrung des Vorzeichens, $1 \to -1$) bei Reflektion wird entsprechend in der Amplitude zur **Wurzel** aus -1.

Ganz analog kann die Aufteilung der Amplituden am zweiten Strahlteiler beschrieben werden, wobei der Phasensprung bei der Reflektion zu bachten ist.

$$|B>\to 1/\sqrt{2}(\sqrt{-1}|E_B> + |D_B>)$$

$$|C>\to 1/\sqrt{2}(\sqrt{-1}|D_C> + |E_C>)$$

Amplituden
Die Amplitude $1/\sqrt{2}\sqrt{-1} = 1/\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ hat die allgemeine Form $\sqrt{p}e^{i\phi/2}$: Es gilt $p = 1/2$ beim Strahlteiler, ein Phasenfaktor π wegen dem Phasensprung bei Reflektion.

gefördert durch:
WILHELM UND ELSE HERAEUS-STIFTUNG

③ Setze im Zustand $1/\sqrt{2}(\sqrt{-1}|B> +|C>)$ für die Amplituden für $|B>, |C>$ die entsprechenden Ausdrücke nach dem zweiten Strahlteiler ein.

- Zeige, dass auf Weg E zu Schirm 1 die Teilamplitude durch $1/2(-|E_B> +|E_C>)$ beschrieben wird.
- Zeige, dass auf Weg D zu Schirm 2 die Teilamplitude durch $(\sqrt{-1})1/2(|D_B> +|D_C>)$ beschrieben wird.

$$|Z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{-1}\,|B\rangle + |C\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{-1}\left(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}|E_B\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|D_B\rangle\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}|D_C\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_C\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-|E_B\rangle + |E_C\rangle\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(|D_B\rangle + |D_C\rangle\right)$$

=> Teilamplitude Weg E zu Schirm 1

$$\frac{1}{2}\left(-|E_B\rangle + |E_C\rangle\right)$$

=> Teilamplitude Weg D zu Schirm 2

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(|D_B\rangle + |D_C\rangle\right)$$

Nutze hierbei:

$|B> \to 1/\sqrt{2}(\sqrt{-1}|E_B> +|D_B>)$

$|C> \to 1/\sqrt{2}(\sqrt{-1}|D_C> +|E_C>)$

gefördert durch:
WILHELM UND ELSE HERAEUS-STIFTUNG

Da die Amplituden $|E_B>$ und $|D_B>$ beide dieselbe Wegstrecke B zwischen den beiden Strahlteilern durchlaufen haben, können wir annehmen, dass diese gleich groß sind, ebenso $|E_A>$ und $|D_A>$. In vereinfachter Notation schreiben wir $b(x) =< x|E_B >$ bei Schirm 1 und $b(x) =< x|D_B >$ am entsprechendem Punkt bei Schirm 2, und analog für $a(x) =< x|E_A >$ bzw $a(x) =< x|D_A >$.

Betragsquadrat
Für das Betrags-quadrat der komplexen Einheit gilt: $|i|^2 = 1$

Für die **Wahrscheinlichkeiten** ergibt sich dann auf Schirm 1 (Weg E)

$$P_1(x) = \frac{1}{4}|-b(x) + c(x)|^2 \quad = \frac{1}{4}\left(|b|^2 + |c|^2 - 2bc \right)$$

und auf Schirm 2 (Weg D)

$$P_2(x) = \frac{1}{4}|b(x) + c(x)|^2 \quad = \frac{1}{4}\left(|b|^2 + |c|^2 + 2bc \right)$$

④ Wir betrachten nun identische Orte auf Schirm 1 und Schirm 2 und vergleichen das Interferenzmuster.

- Auf welchem Schirm wird das Photon für $b(x) = c(x)$ detektiert?
- Auf welchem Schirm wird das Photon für $b(x) = -c(x)$ detektiert?
- Warum sind die Interferenzmuster auf beiden Schirmen komplementär (invers) zueinander?

Für $b = c$ gilt $P_1 = 0$, $P_2 = |b|^2$
$\Rightarrow$ Detektion bei Schirm 2

Für $b = -c$ gilt $P_1 = |b|^2$, $P_2 = 0$
$\Rightarrow$ Detektion bei Schirm 1

Konstruktive Interferenz bei Schirm 1 entspricht destruktiver bei Schirm 2 (Antikorrelation). Ursache sind Phasensprünge: (RR, TT) nach E
$\Rightarrow$ Phasendifferenz 180° für Schirm 1
(RT, TR) $\Rightarrow$ Phasendifferenz 0° für Schirm 2.

gefördert durch:
WILHELM UND ELSE HERAEUS-STIFTUNG